

Coniche come $\left\{ \begin{array}{l} \text{curve algebriche} \\ \text{studio dei prodotti scalari} \end{array} \right.$

Curva algebrica di tipo $\tilde{V}(F)$ $F(x_1, x_2, x_3) = 0$

$P \in \tilde{V}(F)$ semplice $\Leftrightarrow \nabla F|_P \neq 0$

$$P = [(x'_1 \ x'_2 \ x'_3)] \quad Q = [(x_2 \ x_2 \ x_3)]$$

$$F(x'_1 \ x'_2 \ x'_3) = 0 \quad F(\alpha P + \beta Q) = 0$$

$\uparrow$
 $\beta = 0$ dare errore
 soluzioni doppie.

$$g(\beta) := F(P + \beta Q)$$

$$g(0) = 0 \quad \& \quad g'(0) = 0$$

$$\nabla F|_P = 0 \quad \nabla F|_P \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$$

Def: Una conica in $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ è una curva algebrica reale piana del II ordine.

$C = \tilde{V}(F)$ con $F(x_1, x_2, x_3)$ polinomio

CURVA ALGEBRICA

REALE : $F(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$

PIANA : skismo lavorando in $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ e dunque
la curva è contenuta in un piano

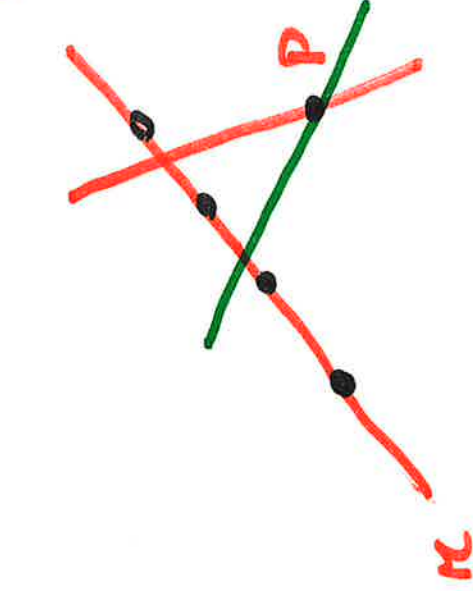
II ordine: $\deg F = 2$.

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + a_{ij} \in \mathbb{R}$$

ci sono 6 parametri $a_{ij} \Rightarrow$ le possibili coniche sono ∞^5

$\rightarrow$ per 5 punti in posizione generale $\exists!$ conica.

$\downarrow$
che determinano 5 equazioni
lineari in 6 parametri: lin.
indipendenti:



Per una conica il fatto che
i punti sono
in pos. generale o
~~equivalente a dire che 3~~
a 3 non sono allineati



posto.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad A = A^T$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = {}^t X A X$$

In particolare A definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ ed i punti della conica e corrispondono esattamente ai punti isotropi per la forma quadratica indotta da A .

$$B(x, y) := {}^t x A y$$

$$F(x) = B(x, x).$$

$$P \in O \Leftrightarrow B(x, x) = 0 \Leftrightarrow P \in P^{\perp B}$$

$$P = [x_1 \ x_2 \ x_3]$$

→ Teorema spettrale (A è ortogonalmante diag.)

→ Teoria dei prodotti scalari.

Oss: B è non degenere $\Leftrightarrow \ker A = \{0\} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Quali sono i punti doppi di una conica di matrice A .

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$\nabla F = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0$$

$$\nabla F = 0 \Leftrightarrow 2AX = \underline{0}$$

$$\text{ed } AX = \underline{0} \Rightarrow {}^T X A X = 0$$

I punti doppi di C sono tutti e soli quelli

la cui coord. omogenee appartengono a $\ker(A)$.

$\Rightarrow$ Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow C$ è privo di punti doppi.

$\Rightarrow$ Se $\det(A) = 0 \begin{cases} \text{rk } A = 2 \Rightarrow C \text{ ha 1 ed 1 solo pto doppio} \\ \text{rk } A = 1 \Rightarrow C \text{ ha } \infty^2 \text{ pti doppi.} \end{cases}$



Una conica (= II ordine) con 1 punto doppio è riducibile
nell'unione di 2 rette.

→ ci sono in $\mathbb{P}^2$ 2 possibilità:

1) 2 rette distinte



2) 2 rette coincidenti



In $\mathbb{P}^2$ i casi possibili sono 3 perché vogliamo distinguere fra quando ne hanno 2 rette reali e distinte e quando ne hanno 2 rette imm. e coniugate.

Abbiamo A reale e imm $\rightarrow$ diagonalizziamo con una matrice ortogonale ($\rightarrow$ camb. di base).

$A' \rightarrow$ matrice diagonale che rappresenta
la stessa conica rispetto una diversa

base.

$$\begin{aligned} & (+ + 0) / (+ 0) \\ & (+ - 0) / (- + 0) \\ & (+ 0 0) / (- 0 0) \end{aligned}$$

Le forme quad. interpretate ad
 $x_3 = 0$ è def. positiva
o def. negativa $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ priva di punti
isotropi

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le coniche sono 2
rette prive di punti
impropri reali $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ 2 rette immag.
e coniugate.

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & x_3 = 0 \\ & x_1^2 = 0 \end{aligned}$$

$$[(0 \ 1 \ 0)]$$

2 rette reali
e coincidenti.

$$\begin{aligned} & x_3 = 0 \\ & x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(1 \ 1 \ 0)] \\ & [(1 \ -1 \ 0)] \end{aligned}$$

2 rette reali
e distinte.

C conica non degenera

$\det A \neq 0$.

in $\mathbb{P}^2 \mathbb{C} \rightarrow A$ è diag. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

è sempre possibile ridurre C alla

forma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

in $\mathbb{P}^2 \mathbb{R} \rightarrow A$ induce un prod. scalare di

possibili equazioni

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = -1$$

(or) $(+++)$ $(---)$

$(++-)$ $(--+)$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = +1$$

conics

privi di

punti reali

conics

generale

punti reali.

in $AG_2(\mathbb{R})$ noi non possiamo scindere
punti propri con punti impropri
quando abbiamo riferimenti.

I punti con $x_3 = 0$ devono essere
messi in punti con $x_3 \neq 0$!

Sia C una conica a punti reali e generale.
La matrice A ha segnatura $(+, +, -)$

$$\text{Studiamo } \begin{cases} XAX = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (x_1, x_2) A^* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Studiamo la segnatura di A^* .

N.B. $\text{rk}(A^*) \geq \text{rk}(A) - 2 \geq 1$

$\bigcirc$ $(++)$ $\rightarrow$ non ci sono pli in propri reali
 $\Rightarrow$ conica è detta ellisse

$\times$ $(+-)$ $\rightarrow$ ci sono 2 pli impropri reali $[(1, -1, 0)]$
 $[(1, 1, 0)]$

$\cup$ $(+0)/(-0)$

$\downarrow$
La conica è detta
iperbole.

$\hookrightarrow$ c'è un unico punto

improprio reale (contatto 2 volte)

$\rightarrow$ la conica è detta parabola.

per classificare le coniche in $EG_2(\mathbb{R})$ si cerca
un riferimento opportuno tale che l'eq della conica
rispetto ad esso sia "semplice".

Sia C una conica, A la sua matrice e B il
quadrato

prod. scalare non degenera in tutto da A .

Dato $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ si dice retta polare di P la retta

$$p = P^\perp B$$

dalla una retta p si dice polo di p il punto

$$p^\perp B = P$$

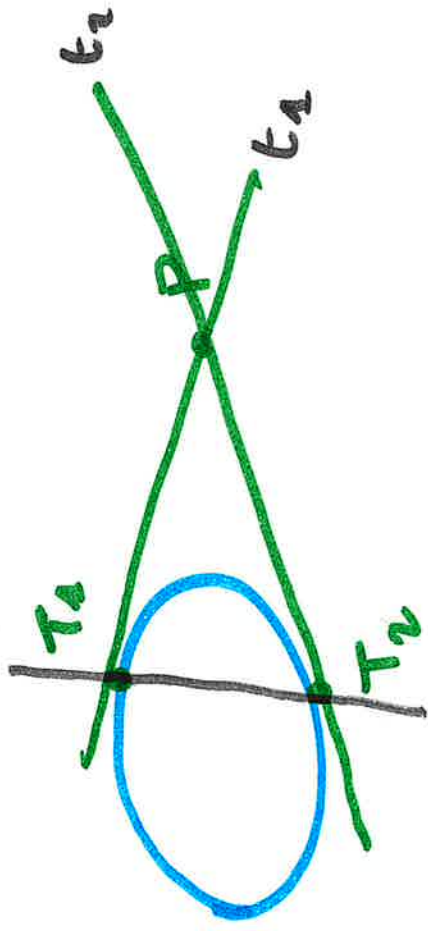
tale che $P^\perp p = p$.

Due punti P, Q tali che $P \perp_P Q$ sono
detti coniugati.

Un punto P è autoconjugato $\Leftrightarrow P \in P^{\perp P}$
 $\Leftrightarrow P \in E$.

Se $P \in E \Rightarrow P^{\perp P} = P$ è la retta tangente a E in P .

Sia $P \in P^2 R$ e sia $p = P^{\perp P}$ la sua polare
 $\Rightarrow p \cap E$ coincide con i punti di tangenza
della retta per P tangenti a E .



siano t_1, t_2, t_3 per $P \in \mathcal{C}$, $T_i = \mathcal{C} \cap t_i$

$$P \in T_1^{\perp B} \Rightarrow T_1 \in P^{\perp B}$$

$$\text{se } T_1 = T_2 \Rightarrow T_1 = T_2 = P$$

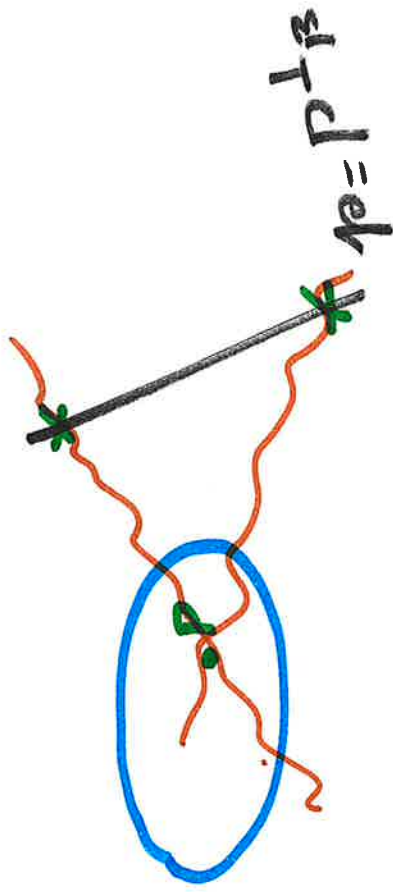
$$P \in T_2^{\perp B} \Rightarrow T_2 \in P^{\perp B}$$

$$\text{e } T_2^{\perp B} = t_3 \text{ in } P \in \mathcal{C} \Rightarrow \\ = P^{\perp B}$$

altrimenti la polare di P è la retta per T_1 e T_2 .

Se $P^{\perp B} \cap \mathcal{C}$ sono 2 punti reali e distinti $\Rightarrow$

$\Rightarrow P$ è detto esterno a $\mathcal{C}$.



Se $P^{\perp\beta}$ in Verre C in 2 punti immaginari
 e coniugati $\Rightarrow P$ è detto interno a C .
 e la l_{β} per P sono 2 rette immaginarie.

Def: Sia C una conica generale.

→ Si dice centro di C l'ipercentro: il polo della
retta $x_3 = 0$

→ C è detta a centro se il suo centro è un punto

proprio → ELLISSE o IPERBOLE

non a centro se il suo centro è un punto

improprio → PARABOLA

→ C è detta circonferenza (generalizzata) se

$$J_\infty = [2, i, 0] \text{ e } \bar{J}_\infty = [2, -i, 0]$$

appartengono a C .

→ Una retta a è detta asse di C se essa è
ortogonale al proprio polo improprio (è un diametro).

→ Una retta d è detta disuguale di E se essa è una polare propria di un punto improprio (= retta per il centro).

→ Una retta re è detta asintotica di E se è tg a E in un suo punto improprio ed è propria

→ Si dicono vertici di E le due intersezioni proprie con gli assi.

→ Si dicono focchi di E i due punti F_1 e F_2 propri delle tg. a E per i punti S_1 e S_2 .

oss: Sia C una conica a centro $\Rightarrow$

1) Se C circonferenza $\Rightarrow$ ogni suo diametro $\dot{e}$ un asse.

2) Se C non circ. $\Rightarrow \exists!$ due assi e sono ortogonali fra loro

Se C non a centro $\Rightarrow \exists!$ asse.

In generale la l_3 a C in un vertice $\dot{e}$ ortogonale all'asse per quel vertice.

$\rightarrow C$ circonferenza $\Rightarrow$ prendiamo come origine del riferimento il centro di C e come base un qualsiasi base ortogonale.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[(1, i, 0)]$$

$$[1 \ i] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 0$$

$$[a_{11} + ia_{12} \quad a_{21} + ia_{22}] \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 0$$

$$2ia_{12} + a_{11} - a_{22} = 0 \quad \text{value}$$

$$\downarrow a_{12} = 0 \quad \& \quad a_{11} = a_{22}$$

$$[0 \ 0 \ 1] A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$(a_{13} \ a_{23} \ a_{33}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{33}x_3^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = -\frac{a_{33}}{a_{11}}$$

Ellissi / iperbolici $\rightarrow$ rif. in cui n ha

$\rightarrow$ ORIGINE = CENTRO

$\rightarrow$ BASE DEL RIF = ^{possibile} orig.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{bmatrix}$$

CENTRO = ORIGINE. eq. assi.

$$\begin{pmatrix} l & m & o \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (l a_{11} + m a_{12}) x_1 + \\ + (l a_{12} + m a_{22}) x_2 + \\ (l a_{13} + m a_{23}) x_3 = 0$$

$$\left| \begin{matrix} l a_{11} + m a_{12} & l a_{12} + m a_{22} \\ l & m \end{matrix} \right| = 0$$

$$l m a_{11} + m^2 a_{12} + l^2 a_{12} + l m a_{22} = 0$$

$$(m^2 + l^2) a_{12} + l m (a_{11} + a_{22}) = 0$$

(01)
↑
(10)

$$a_{12} = 0$$

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0$$

$$a_{11} a_{22} > 0 \text{ ellipse}$$

$$a_{11} a_{22} < 0 \text{ ipsohole.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ ellissi}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ iperboli}$$

parabola

→ inf. in cui origine = vertice

Asse

Base RIF = $\begin{cases} 2 \text{ vett. parallelo all'asse} \\ 2 \text{ vett. parallelo alla tg. nel vertice.} \end{cases}$

$$y = ax^2$$

$$x = ay^2$$